2021.03.29 PI 세션 2차

GOAL
1. 수치해석 배우는 이유 상기 ㅎㅎ
2. LU 분해법의 이해
3. LU 분해법과 역행렬
4. Gauss-Seidel 법의 이해
5. 질의응답 및 같이 풀어보기 :)

1. 수치해석 배우는 이유 상기 ㅎㅎ

수치해석 → 컴퓨터가 문제를 풀게 하기위한 방법

하지 말것 : 이걸 내가 왜하고 있지? (노가다)

→ 컴터가 해야하는것 이해한다 + 몇번만 해본다.

왜 그냥 풀면 안되지?

→ 문제가 커지고 복잡해지면 아 주어진 조건이 제한적이면 (real world) 다양한 방법 필요

해야 할것 : 그냥 컴퓨터로 해를 구할수 있는 여러가지 방법 맛보기 한다 ~ ^^

2. LU 분해법의 이해

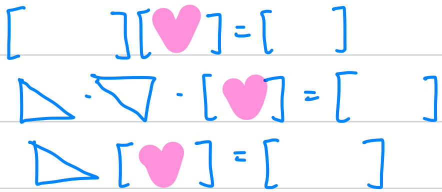
고정 변함

배경 : $Ax=b$ 을 효율적으로 풀기 위해 (누가? 컴퓨터가)

방법 : A를 LU로 분해하여 계산 비용 줄이기 (누구 편하라고? 컴퓨터)

$A=LU$

$Ax=b$



$LUx=b$

$Ux=D$

$LD=b$

D구하기 by forward sub

$Ux=D$ 이므로

x구하기 by backward sub.

A=LU로 나누는 방법?

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ f_{21} & 1 & \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22}' & a_{23}' \\ & & a_{33}'' \end{bmatrix}$$

처리 횟수

* 표시 x 인 곳은 0 임

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \quad f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \quad f_{32} = \frac{a_{32}'}{a_{22}'}$$

3. LU 분해법과 역행렬

$Ax = B \rightarrow Ax = I \rightarrow x = A^{-1}$

오리지널 방법 : $[A \mid I] \rightarrow [I \mid A]$

왜 안쓰냐? → 컴퓨터가 힘들다!

$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$A[x_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad A[x_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots$

몇번째 3한 x_i 인지

참조 :

$$|\varepsilon_{a,i}| = \left| \frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j} \right| \times 100\% < \varepsilon_s$$

4. Gauss-Seidel 법의 이해

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

then,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$\downarrow$$

$$a_{11}x_1 = -a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + b_1$$

$$\downarrow$$

① $x_1 = \dfrac{-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + b_1}{a_{11}}$

비슷하게,

② $x_2 = \dfrac{-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 + b_2}{a_{22}}$

③ $x_3 = \dfrac{-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + b_3}{a_{33}}$

방법

1. 주어진 (초기) x_2, x_3를 ① 에 넣어 x_1 3하기
2. 주어진 x_3와 방금3한 x_1 ② 에 넣고 x_2 구하기
3. 구한 x_1, x_2 넣고 x_3 3하기
4. 원하는 상대오차 도달시 까지 반복

☆주의 : 모든 x_i에 대한 상대오차를 고려하기!
(x_1 만 만족했다고 멈추면 안됨!)

2021.04.12 P1 세션 5차

목적 : 다차원 공간에서 최대 & 최소값 찾기!

1) 수학적 방법

2) 수치해석적 방법

1) 수학적 방법

주어진 식이 f(x) 라고 하면

critical point 구하기 위해 미분!

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = 그 점에서의 기울기$$

1차 미분값이 0 이면, 그 점이 최소? 최대? → Hessian |H|

$$H = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d\nabla f}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$|H| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

local max $\nabla f = 0$, $|H| > 0$ $\partial^2 f / \partial x^2 < 0$

local min $\nabla f = 0$, $|H| > 0$ $\partial^2 f / \partial x^2 > 0$

Saddle $\nabla f = 0$ $|H| < 0$

만약 argument가 여러개라면?

Hessian H of $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \\ & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

local max $\nabla f = 0$ H is negative definite or eigenvalues of H < 0

local min $\nabla f = 0$ H is positive definite or eigenvalues of H > 0

Saddle $\nabla f = 0$ H is indefinite or eigenvalues of +&−

Sufficient condition for a minimum

1) for smooth f(x), $x \in \mathbb{R}$ $f(x^*)$ is local min of f(x) if $f'(x^*) = 0$ & $f''(x^*) > 0$.

2) for smooth f(x), $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x^*)$ is local min of f(x) if $\nabla f(x^*) = 0$ & $H(x^*)$ is positive definite.

2. 수치 해석적 방법

다들 연습문제 & ppt 예제 여러번 풀어보시고 시험 잘보세요~

Steepest Ascent Method (Gradient Ascent Method)

Idea: 기울기 큰 길로 가다보면 max 가 나올 것이다.

1. x_0 에서 시작
2. 방향찾기
3. 2 방향으로 얼마나 갈지 찾기
4. 거기로 가기 & 반복

1. x_0 에서 시작
2. 방향찾기

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 방 \\ 향 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_0 + 방향_x \cdot h \\ y_0 + 방향_y \cdot h \end{bmatrix}$$

3. 2 방향으로 얼마나 갈지 찾기 → 1D optimization 응용 ㄱㄴ.

$$f\left(\begin{bmatrix} x_0 + 방향_x \cdot h \\ y_0 + 방향_y \cdot h \end{bmatrix}\right)$$ 의 최대 값 찾기 → h 나옴

4. 거기로 가기 & 반복

3 에서 나온 h 만큼 시작점 에서 가기 → 반복

수치해석 P] 2021. 05. 24

Splines

: 여러개의 저차원 함수로 이루어진 함수
지나야 하는 점을 모두 지나는 함수

용어

- knots : 2개의 spline이 만나는곳
- continuity

  C^n : n번 미분 가능

  G^n : C^n 보다 유한 제약 조건으로 사용

Spline의 차수

given : $(x_1, f(x_1)) \cdots (x_n, f(x_n))$

Linear : 각 구간마다 일차함수 구하기

$s_n(x) = a_n + b_n(x - x_n)$

$a_i = f_i$

$b_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

Quadratic

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$

1. $S_i(x) = f_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \quad 1 \le i \le n-1$
2. $f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = f_{i+1} \quad (h_i = x_{i+1} - x_i) \quad 1 \le i \le n-1$
3. $b_i + 2c_i h_i = b_{i+1} \quad 1 \le i \le n-2$
4. $c_1 = 0$ (natural spline 의 조건)

Cubic

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$

1. $a_i = f_i \quad 1 \le i \le n$
2. $b_i = f[x_{i+1}, x_i] - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \quad 1 \le i \le n-1$
3. $$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]) \\ \vdots \\ 3(f[x_n, x_{n-1}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}]) \\ 0 \end{bmatrix}$$
4. $d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \quad 1 \le i \le n-1$

핵심! 시험문제에 나오면 바로 풀수 있을 정도로 연습해두기!